Chứng minh trong $\mathbb{R}^3$

Cho trường vector:

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2,\ y^2,\ z(x^2 + y^2)).$$

Chứng minh rằng:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

với C là bất kỳ đường đi chính quy từng khúc, kín nằm trên bề mặt hình nón

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad z \geq 0.$$

Bước 0 — Nhận định định lý cần dùng

Dấu hiệu:

- $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$: tích phân đường của trường vector.
- C là đường kín.
- Không gian $\mathbb{R}^3$, có mặt cong (hình nón).

$\Rightarrow$ Dùng **Định lý Stokes**.

Định lý Stokes

Nếu S là mặt có biên $C = \partial S$, thì:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS.$$

Bước 1 — Viết $\vec{F}$ theo dạng chuẩn

$$\vec{F} = (P, Q, R), \quad P = x^2,\ Q = y^2,\ R = z(x^2 + y^2).$$

Bước 2 — Tính xoáy $\nabla \times \vec{F}$

Công thức:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Tính từng thành phần:

- Thành phần $\vec{i}$: $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 2yz - 0 = 2yz$.
- Thành phần $\vec{j}$: $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 - 2xz = -2xz$.
- Thành phần $\vec{k}$: $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - 0 = 0$.

Do đó:

$$\nabla \times \vec{F} = (2yz,\ -2xz,\ 0).$$

Bước 3 — Tích vô hướng với pháp tuyến mặt nón

Mặt nón: $z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \varphi(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 = 0$. Pháp tuyến: $\vec{n} \parallel \nabla\varphi = (-2x,\ -2y,\ 2z)$.

Tích vô hướng:

$$(2yz,\ -2xz,\ 0) \cdot (-2x,\ -2y,\ 2z).$$

Tính:

$$2yz(-2x) + (-2xz)(-2y) + 0 \cdot 2z = -4xyz + 4xyz + 0 = 0.$$

Bước 4 — Kết luận tích phân mặt

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{mọi điểm trên mặt nón.}$$

Do đó:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = 0.$$

Bước 5 — Kết luận cuối cùng

Theo định lý Stokes:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

với mọi đường kín C nằm trên mặt nón $z^2 = x^2 + y^2,\ z \geq 0$.

Tóm tắt bản chất

- Đây không phải bài tính tích phân, mà là bài nhận diện xoáy song song mặt.
- Xoáy vuông góc pháp tuyến $\Rightarrow$ không xuyên qua mặt.
- Tuần hoàn quanh mọi đường kín bằng 0.

Keyword: "Xoáy nằm trong mặt $\Rightarrow$ không có thông lượng $\Rightarrow$ tích phân đường = 0".